2. Лаптев Г. Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275-382.

3. Столяров А. В. *Двойственная теория оснащенных многообразий.* – Чебоксары: Чувашский госпедуниверситет им. И.Я. Яковлева, 1994. – 290 с.

4. Столяров А. В. *Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: Калининградск. ун-т, 2001. – Вып. 32. – С. 94-101.

5. Фиников С. П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М. – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

А. А. Соболев, М. Р. Тимербаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

andreyasob@yandex.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ 2-ТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ 4-ГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Работа посвящена исследованию свойств решения и построению схем метода конечных элементов (МКЭ) для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на интервале $\Omega = (0,1)$

$$Au \equiv D^2\big(x^\alpha a(x)D^2u(x)\big) - D\big(a_1(x)Du(x)\big) + a_0(x)u(x) = f(x)$$

с однородными граничными условиями Дирихле

$$u(0) = Du(0) = u(1) = Du(1) = 0.$$

Предполагаются выполненными следующие условия на коэффициенты уравнения: $\alpha < 1$, $a(x) \geqslant c_0 > 0$, $a_1(x), a_0(x) \geqslant 0$. Ранее для этой задачи (с $a_1 \equiv 0$) в статье [1] анализировались схемы МКЭ второго порядка точности с кубическими эрмитовыми элементами. В предлагаемой работе применяется мультипликативное выделение особенности для дискретизации с высоким порядком точности вырождающегося уравнения четвертого порядка. Особенность задачи состоит в том, что в окрестности точки $x = 0$ дифференциальный оператор A не удовлетворяет условию равномерной эллиптичности. Поэтому решение уравнения при $\alpha > 0$ в окрестности точки вырождения имеет неограниченные производные, что делает малоэффективным применение стандартного МКЭ. В данной работе метод численного решения задачи основывается на мультипликативном выделении особенности [2], то есть представлении решения в виде произведения специального веса и новой неизвестной функции. Априорные оценки показывают (теорема 1), что эта функция является гладкой и для ее аппроксимации можно использовать стандартный кусочно-полиномиальный базис.

Введем в рассмотрение весовые классы функций на интервале Ω. Для вещественного γ через $L_{2,\gamma}$ обозначим пространство измеримых функций с нормой $\|u\|_{L_{2,\gamma}} = \|x^{-\gamma}u\|_{L_2}$. Через H^s_γ будем обозначать пространство функций, имеющих обобщенную производную порядка s класса $L_{2,\gamma}$. Это пространство является гильбертовым с нормой

$$\|u\|_{H^s_\gamma} = \left(\|D^s u\|^2_{L_{2,\gamma}} + \|u\|^2_{L_2(1/2,1)}\right)^{1/2}.$$

Замыкание множества функций C_0^∞ в норме пространства H^s_γ обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma(\Omega)$. Замыкание в H^s_γ бесконечно дифференцируемых финитных в окрестности точки $x = 1$ функций обозначим $\dot{H}^s_\gamma$. Через $W^s_{\infty,\gamma}$ будем обозначать пространство функций u, таких, что $x^{-\gamma}D^s u \in L_\infty$.

Положим $\hat{u}(x) = u(x)/\sigma(x)$, где u — решение исходной задачи, $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$. Определим оператор $\hat{A}$ формулой $\hat{A}\hat{u} = A(\sigma\hat{u})$. Вместо исходной задачи рассмотрим задачу о нахождении функции $\hat{u}$:

$$\hat{A}\hat{u}(x) = f(x), \quad \sigma\hat{u}\big|_{x=0} = D(\sigma\hat{u})\big|_{x=0} = \hat{u}(1) = D\hat{u}(1) = 0.$$

Пусть выполнены условия: $\alpha - 5/2 - s < \gamma < 1/2$, $a \in W^{s+2}_\infty$; для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $x^{1-\alpha}a_1 \in W^{s+1}_{\infty,\varepsilon-2-s}$, $x^{2-\alpha}a_0 \in W^s_{\infty,\varepsilon-2-s}$ при $\alpha - 5/2 - s < \gamma \leqslant -3/2 - s$ и $x^{1-\alpha}a_1 \in H^{s+1}_\gamma$, $x^{2-\alpha}a_0 \in H^s_\gamma$ при $-3/2 - s < \gamma < 1/2$. Тогда для решения $\hat{u}$ справедлива теорема гладкости

Теорема 1. *Оператор $\hat{A}$ осуществляет изоморфизм пространства $H^{s+4}_{\gamma-2} \cap \dot{H}^2_\gamma$ на H^s_γ, и справедлива оценка*

$$\|\hat{u}\|_{H^{s+4}_{\gamma-2}} \leqslant c\|f\|_{H^s_\gamma}.$$

Следствие 1. *Если a, $x^{1-\alpha}a_1$, $x^{2-\alpha}a_0$, f — функции класса $C^\infty(\bar{\Omega})$, то функция $\hat{u}$ принадлежит $C^\infty(\bar{\Omega})$.*

Определим на пространстве $V = \overset{\circ}{H}{}^2_{-\alpha/2}$ билинейную форму $\mathfrak{a}$ и линейный функционал $\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int\limits_\Omega x^\alpha a D^2u D^2v + a_1 Du Dv + a_0 uv\, dx, \ \mathfrak{f}(v) = \int\limits_\Omega fv\, dx.$$

Под обобщенным решением исходной задачи будем понимать функцию $u \in V$, которая удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{a}(u,v) = \mathfrak{f}(v) \quad \forall\, v \in V.$$

Теорема 2. *Если $\gamma \geqslant \alpha/2 - 2 - s$, a, $x^{2-\alpha}a_1$, $x^{4-\alpha}a_0 \in L_\infty$, то решение $u \in V$ вариационной задачи существует и единственно для любой правой части $f \in H^s_\gamma$.*

Положим $\widehat{V} = \dot{H}^2_{\alpha/2-2}$. Через σ обозначим линейный оператор умножения на функцию $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$. В статье [1] доказана

Лемма 1. *Оператор σ является изоморфизмом пространства $\widehat{V}$ на пространство V.*

Из леммы 1 следует, что вариационная задача на гильбертовом пространстве V эквивалентна вариационной задаче на гильбертовом пространстве $\widehat{V}$: найти функцию $\hat{u} \in \hat{V}$, такую, что

$$\hat{\mathfrak{a}}(\hat{u}, \hat{v}) = \hat{\mathfrak{f}}(\hat{v}) \quad \forall\, \hat{v} \in \hat{V},$$

где $\hat{\mathfrak{a}}(\hat{u}, \hat{v}) = \mathfrak{a}(\sigma u, \sigma v)$, $\hat{\mathfrak{f}}(\hat{v}) = \mathfrak{f}(\sigma v)$. При этом решения связаны между собой соотношением $u = \sigma \hat{u}$.

На отрезке $[0,1]$ зададим набор узлов $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. Данный набор точек образует разбиение $\mathcal{T}_h = \{e_k\}_{k=1}^n$ отрезка на конечные элементы $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ с шагом $h = \max\limits_{k=1,\dots n} h_k$, где $h_k = x_k - x_{k-1}$, $x_k \sim \left(\frac{k}{n}\right)^r$, $r \geqslant 1$ — степень сгущения сетки к точке $x = 0$. Пусть $m \geqslant 3$ — натуральное число. Определим пространство конечных элементов $S_h^{m,1}(\mathcal{T}_h) = \{\varphi \in C^1[0,1] : \varphi\big|_{e_k} \in P_m(e_k)\ \forall\, e_k \in \mathcal{T}_h\}$. Положим $\hat{V}_h = S_h^{m,1} \cap \hat{V} = \{\hat{v} \in S_h^{m,1} : \hat{v}(1) = D\hat{v}(1) = 0\}$, $V_h = \sigma \hat{V}_h$. Через $u_h \in V_h$, $\hat{u}_h \in \hat{V}_h$ обозначим приближения Галеркина для соответствующих вариационных задач.

Далее предполагаются выполненными условия на функции a, a_1, a_0, сформулированные перед теоремой 1 при $s = m - 3$. Для оценки погрешности метода справедлива

Теорема 3. *Пусть* $\alpha/2 - m + 1 < \gamma < 1/2$. *Тогда для* $f \in$ $\in H_\gamma^{m-3}$ *имеет место оценка*

$$\|u - u_h\|_V \sim \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{\hat{V}} \leqslant ch^\theta \|f\|_{H_\gamma^{m-3}},$$

где $\theta = \min\{m-1, r(m-1+\gamma-\alpha/2)\}$.

Следствие 2. *Пусть степень сгущения сетки* $r =$ $= \max\{1, (m-1)/(m-1+\gamma-\alpha/2)\}$, $f \in H_\gamma^{m-3}$. *Тогда справедлива оптимальная оценка*

$$\|u - u_h\|_V \leqslant ch^{m-1} \|f\|_{H_\gamma^{m-3}}.$$

Следствие 3. *Если* $f \in W_\infty^{m-3}$, *то на равномерной сетке* (*то есть при* $r = 1$) *имеет место оценка*

$$\|u - u_h\|_V \leqslant ch^{m-1} \|f\|_{W_\infty^{m-3}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-97015 и 10-01-00728).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимербаев М. Р. *О схемах МКЭ для 2-точечной граничной задачи Дирихле 4-го порядка со слабым вырождением* // Исслед. по прикл. мат. и инф. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. – Вып. 25. – С. 78-85.

2. Тимербаев М. Р. *Мультипликативное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений* // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 7. – С. 1086-1093.